I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Slavěna si napsala barevnými fixy čtyři různá přirozená čísla: červené, modré, zelené a žluté. Když červené číslo vydělí modrým, dostane jako neúplný podíl zelené číslo a žluté představuje zbytek po tomto dělení. Když vydělí modré číslo zeleným, vyjde jí dělení beze zbytku a podílem je číslo žluté. Slavěna prozradila, že dvě z jejích čtyř čísel jsou 97 a 101.

Určete ostatní Slavěnina čísla a přiřaďte jednotlivým číslům barvy. Najděte všechny možnosti. (*M. Petrová*)

Z9–I–2

Najděte všechny dvojice nezáporných celých čísel x a jednomístných přirozených čísel y, pro která platí

$$\frac{x}{y} + 1 = x,\overline{y}.$$

Zápis na pravé straně rovnosti značí periodické číslo. (*K. Pazourek*)

Z9–I–3

V rovnostranném trojúhelníku ABC je bod T jeho těžištěm, bod R je obrazem bodu T v osové souměrnosti podle přímky AB a bod N je obrazem bodu T v osové souměrnosti podle přímky BC.

Určete poměr obsahů trojúhelníků ABC a TRN. (*E. Semerádová*)

Z9–I–4

Na zdi byla napsána dvě stejná pětimístná čísla. Pat před jedno z těchto čísel připsal jedničku, Mat připsal jedničku za to druhé. Tím dostali dvě šestimístná čísla, z nichž jedno bylo třikrát větší než druhé.

Která pětimístná čísla byla původně napsána na zdi? (*L. Hozová*)

Z9–I–5

Na hřišti jsou nakresleny tři stejně velké kruhy, z nichž žádné dva nejsou totožné. Rozmístěte 16 dívek tak, aby v každém kruhu stálo 9 dívek.

Najděte alespoň osm podstatně různých rozmístění, tj. takových rozmístění, při kterých se nerozlišují dívky ani kruhy. (Záměna jednotlivých dívek, příp. celých kruhů s dívkami dává rozmístění, které není podstatně různé od původního.) (*L. Hozová*)

Z9–I–6

Josef a Marie objevili na dovolené pravidelný jehlan, jehož podstavou byl čtverec o straně 230 m a jehož výška byla rovna poloměru kruhu se stejným obvodem jako podstavný čtverec. Marie označila vrcholy čtverce $ABCD$. Josef vyznačil na přímce spojující bod B s vrcholem jehlanu takový bod E, že délka lomené čáry AEC byla nejkratší možná.

Určete délku lomené čáry AEC zaokrouhlenou na celé centimetry.

(*M. Krejčová, F. Steinhauser*)